**Применение метода интервалов к решению неравенств при подготовке к ЦТ**

При решении многих задач, в том числе и задач ЦТ часто возникает необходимость либо непосредственно решить неравенство, либо этот шаг – решение неравенства возникает как вспомогательный при решении других, более сложных и объёмных задач. Обобщённый метод интервалов наиболее универсален при решении неравенств практически любого типа. Подход, положенный в основу метода интервалов, основан на следующем свойстве непрерывной функции: функция сохраняет постоянный знак на интервале (a, b), на котором эта функция непрерывна и не обращается в нуль. Это же свойство характерно для числовых лучей (−∞, a) и (a, +∞).

**Схема решения выглядит следующим образом:**

**1. Привести неравенство к такому виду, где в левой части находится функция f (x), а в правой 0.**

**2. Найти область определения функции f(x).**

**3. Найти нули функции f(x), то есть – решить уравнение f(x) = 0 (а решать уравнение обычно проще, чем решать неравенство).**

**4. Изобразить на числовой прямой область определения и нули функции.**

**5. Определить знаки функции f(x) на полученных интервалах. Надо довольно чётко знать «правило чередования знаков», а именно: определить знак в крайнем справа интервале, а далее – при переходе через корень чётной кратности – знак сохраняется, при переходе через корень нечётной кратности – знак изменяется.**

**6. Выбрать интервалы, где функция принимает необходимые значения и записать ответ.**

Многие учащиеся в современном мире не желают запоминать «лишнюю информацию». Поэтому я считаю, что метод интервалов является палочкой выручалочкой для «среднего» ученика, так как даже простейшие случаи неравенств – линейные и квадратные – можно безошибочно решать этим методом, причем для целых неравенств можно пропустить пункт 2: найти область определения функции f(x).

Задание 1 (РТ1, 2013/2014г., А–14)

Решением неравенства

1. ; 2) ; 3) ; 4); 5) ;

На этом этапе можем перейти к уравнению:

.

– +

х

.

Ответ: 2)

Задание 2.

Решить неравенства методом интервалов:

+

x

2,5

Ответ: (;);

Ответ:

Ответ: (; 2,5)

+

+

x

2,5

Ответ: нет решений

Задание 3.

Найдите количество целых решений неравенства

-

-

x

4

+

,

Выбираем интервал, где функция принимает положительные значения: ;4), выписываем целые решения: 1,2,3, всего три целых решения неравенства

Ответ: 3

Задание 4.

Решите неравенство: .

.

Найдём нули функции и определим их кратность: =1 (четная кратность), остальные корни 3, -1, 0, 5, -2 (нечетной кратности). Отмечаем корни на числовой оси с учетом области определения неравенства и определяем знаки на промежутках с учетом кратности корней.

Распространенной ошибкой является потеря изолированных точек, на что стоит обратить особое внимание. Многие рекомендуют в точках, изображающих корни четной кратности рисовать петлю и ставить в ней «улетающий знак».

– – + – – +

х

–5 –2 0 1 3

Ответ:

**Метод интервалов для рациональных неравенств**

При решении рациональных неравенств, по существу – единственное отличие от решения

целых неравенств – это необходимость учесть область определения неравенства. А именно – деление на ноль не определено, поэтому знаменатель дроби не может равняться нулю.Если неравенство строгое, то корни числителя обозначаем «выколотой» точкой, если нет - закрашенной. Корни знаменателя «выколоты» всегда, независимо от строгости знака сравнения.

Задание 5. РТ-1, 2015/2016г., В6**.**

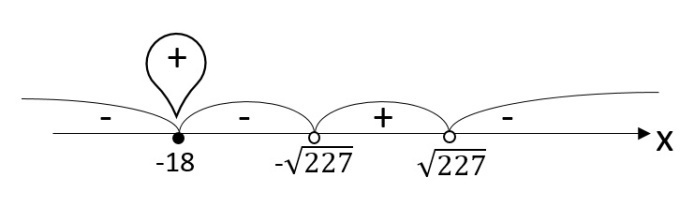
Найдите количество всех целых решений неравенства

Решение.

1. Ведем функцию f
2. D(y) =
3. Найдем нули функции:;

.

1. Отметим нули числителя и знаменателя на координатной прямой. Неравенство является нестрогим, значит, нули числителя изображаются закрашенными точками, а нули знаменателя выколотыми. Числа разбивают координатную прямую на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак.



1. Определим знаки функции f(x) в крайнем справа интервале: смотрим на старшие коэффициенты в каждом множителе: в знаменателе перед стоит знак «», а в числителе везде «+», значит в крайнем справа интервале знак «». Или можно определить знак функции при любом значении х. В любом случае Обращаем особое внимание на корень х = 18 он четной кратности, значит, проходя через эту точку функция знак не изменит. Расставляем знаки.
2. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: (;)

Так как , то на промежутке (0;) пятнадцать целых решений, на промежутке (;) ещё 15. Добавляем х = 0 и х = Всего 32 целых решения.

Ответ: 32 целых решения.

При решении дробно-рациональных неравенств при подготовке к ЦТ учащимся показываю и другую форму оформления решения методом интервалов. Рассмотрим на следующем примере:

Задание 6. РТ-2, 2018/2019г., В6**.**

Найдите сумму всех целых решения неравенства: ***.***

Данное неравенство удобно решать, используя метод интервалов. Для этого преобразуем исходное неравенство так, чтобы справа стоял 0.

*;*

;

Следующий шаг: приравниваем выражение, стоящее слева к нулю и находим корни числителя и корни знаменателя.

;

Корни числителя: ; 11 точки закрашенные.

Корни знаменателя: 3 точки выколотые.

Корень х = встречается два раза, следовательно, корень четной кратности, значит, проходя через эту точку, функция знак не изменит. Помним, что выколотая точка «сильнее» закрашенной! Расставляем знаки.

+ +

х

4 3 11

Выбираем интервал, где функция принимает отрицательные значения: х(

Находим сумму всех целых решения неравенства: 4+5+6+7+8+9+10+11=60.

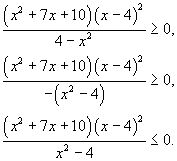
Ответ: 60

Задание 7. ЦТ 2015 г., В6

 Найдите сумму целых решений неравенства http://images.by.prom.st/32054445_w640_h2048_0.gif?PIMAGE_ID=32054445.

**Решение.**

Данное неравенство удобно решать, используя метод интервалов. Для этого преобразуем исходное неравенство:

http://images.by.prom.st/27725004_w640_h2048_5.gif?PIMAGE_ID=27725004

Заметьте, что, умножая на -1 левую и правую части неравенства, мы поменяли знак неравенства.

Далее разложим квадратный трехчлен в числителе на множители:

http://images.by.prom.st/32054448_w640_h2048_2.gif?PIMAGE_ID=32054448, а в знаменателе применим формулу разности квадратов: http://images.by.prom.st/32054450_w640_h2048_3.gif?PIMAGE_ID=32054450.

Тогда неравенство принимает вид http://images.by.prom.st/32054451_w640_h2048_4.gif?PIMAGE_ID=32054451

Все это были обычные шаги, необходимые для преобразования неравенства к виду, пригодному для применения метода интервалов.

Теперь внимание! Не спешите сокращать http://images.by.prom.st/32054452_w640_h2048_5.gif?PIMAGE_ID=32054452 в числителе и знаменателе. Так вы упустите из виду, что x не может быть равен -2. Перед сокращением необходимо пометить, что http://images.by.prom.st/32054458_w640_h2048_6.gif?PIMAGE_ID=32054458.

Итак, рассматриваем неравенство

http://images.by.prom.st/32054459_w640_h2048_7.gif?PIMAGE_ID=32054459

Расставляем нули числителя и знаменателя на числовой прямой, а также знаки неравенства, используя чередование знаков: начинаем со знака «+», а проходя через точку http://images.by.prom.st/32054461_w640_h2048_8.gif?PIMAGE_ID=32054461, знак не меняем.

http://images.by.prom.st/32054476_w640_h2048_23_08_2015_13_24_55.png?PIMAGE_ID=32054476

Теперь наносим на полученную область решений выколотую точку http://images.by.prom.st/32054471_w640_h2048_9.gif?PIMAGE_ID=32054471 (на чередование знаков эта точка не влияет)

http://images.by.prom.st/32054477_w640_h2048_23_08_2015_13_25_20.png?PIMAGE_ID=32054477

По полученной схеме записываем решение неравенства

http://images.by.prom.st/32054472_w640_h2048_10.gif?PIMAGE_ID=32054472.

Обратите внимание, что число 4 само по себе является решением неравенства, поэтому включается в множество решений.

Из записанного множества выписываем все целые решения: http://images.by.prom.st/32054474_w640_h2048_11.gif?PIMAGE_ID=32054474.

Их сумма равна -8.

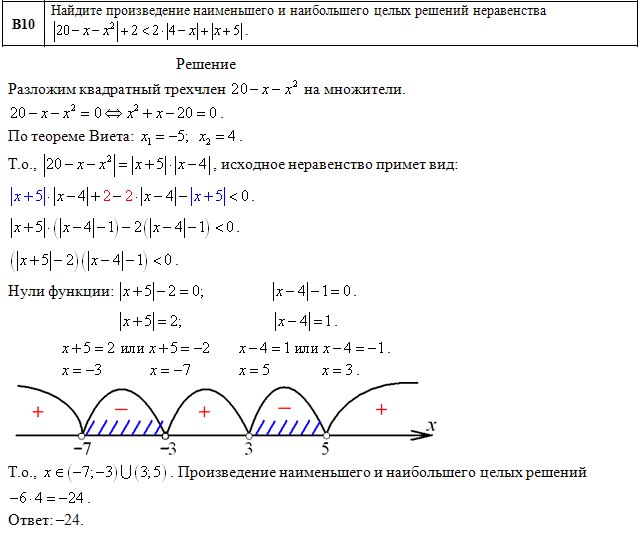
**​Ответ:**-8.

**Метод интервалов для неравенств с модулями**

Аналогичным образом обобщённый метод интервалов может быть использован при решении неравенств с модулями (в «противовес» обычному способу решения подобных неравенств – рассмотрения случаев)

Задание 8.

Найти произведение наименьшего и наибольшего целых решений неравенства



**Метод интервалов для иррациональных неравенств**

Обобщённый метод интервалов во многих случаях представляет собой хорошую альтернативу традиционным схемам решения иррациональных неравенств вида < g(x) и > g(x).

При решении иррациональных неравенств область определения функции естественным образом находится из условия неотрицательности подкоренного выражения.

Задание 9.

Решите неравенство

1. Ведем функцию
2. D(y) = ;
3. Найдем нули функции:;

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

+ х

61 3

1. Определить знак функции f (x) в крайнем справа интервале:

, значит в крайнем справа интервале знак «». Так как область определения на промежутке непрерывна, то дальше идет чередование знаков.

1. Выбираем интервал, где функция принимает отрицательные значения: (3;+)

Ответ: (3;+)

Найдите количество целых решений неравенства:

1. Ведем функцию
2. D(y) = ;
3. Найдем нули функции:;

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

+ х

6 3

1. Определить знак функции f (x) в крайнем справа интервале:

, значит в крайнем справа интервале знак «». Так как область определения на промежутке непрерывна, то дальше идет чередование знаков.

1. Выбираем интервал, где функция принимает положительные значения: ;3)
2. Ответ: ;3)

Задание 10. Решите неравенство:

1. Ведем функцию
2. D(y) =
3. Найдем нули функции:;

;

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

+

х

1 5 6

1. Определить знак функции f (x) в крайнем справа интервале трудно, поэтому определим:

, значит на интервале знак «+». Так как область определения на промежутке непрерывна, то дальше идет чередование знаков.

1. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: .

Ответ:

Задание 11.

Решите неравенство:;

1. Ведем функцию .
2. D(y) = ;
3. Найдем нули функции:;

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

+

х

1 2 3

1. Определяем знаки функции f (x) на промежутках:

, f (2,5), f (2)

1. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: и равна нулю на области определения: х = 1; и х = 2.

Ответ:

Из недостатков метода – может быть затруднено определение знаков на полученных интервалах, особенно, если точки расположены довольно близко друг к другу и/или когда значения нулей или границ области определения – «плохие».

Решите самостоятельно:

1. Найдите количество целых решений неравенства:

Ответ: (;; 3 целых решения

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

Ответ: (;); 3

1. Найдите количество целых решений неравенства:

Ответ: ;; 4 целых решения.

**Метод интервалов для логарифмических неравенств**

Обобщённый метод интервалов может быть использован и вместо традиционного способа решения логарифмических и показательных неравенств.

Задание 12.

Решите неравенство и найдите количество целых решений:

1. Ведем функцию .
2. Найдём область определения функции:

D(y) = ;

1. Найдем нули функции:,

,

,

,

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

x+

-1

+

1

2

3

-

+

1. Определяем знаки функции f (x) на промежутках:

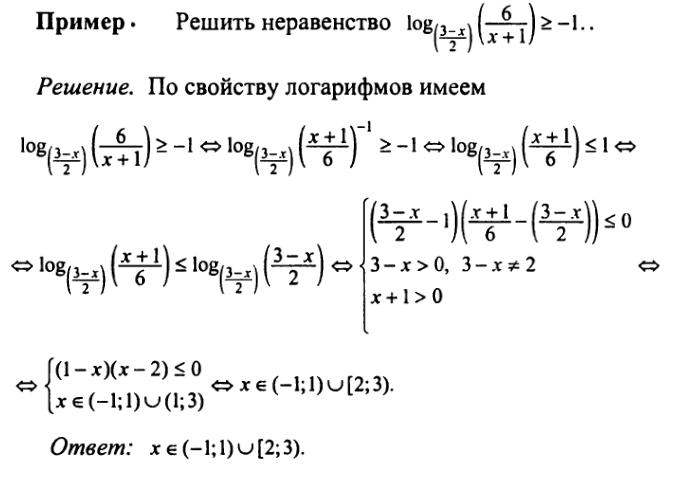
, а дальше чередование знаков.

1. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: .

Целые решения неравенства: 0 и 2

Количество целых решений: 2

Ответ: 2

Для сравнения: это же неравенство, решенное другим способом

Решите самостоятельно:

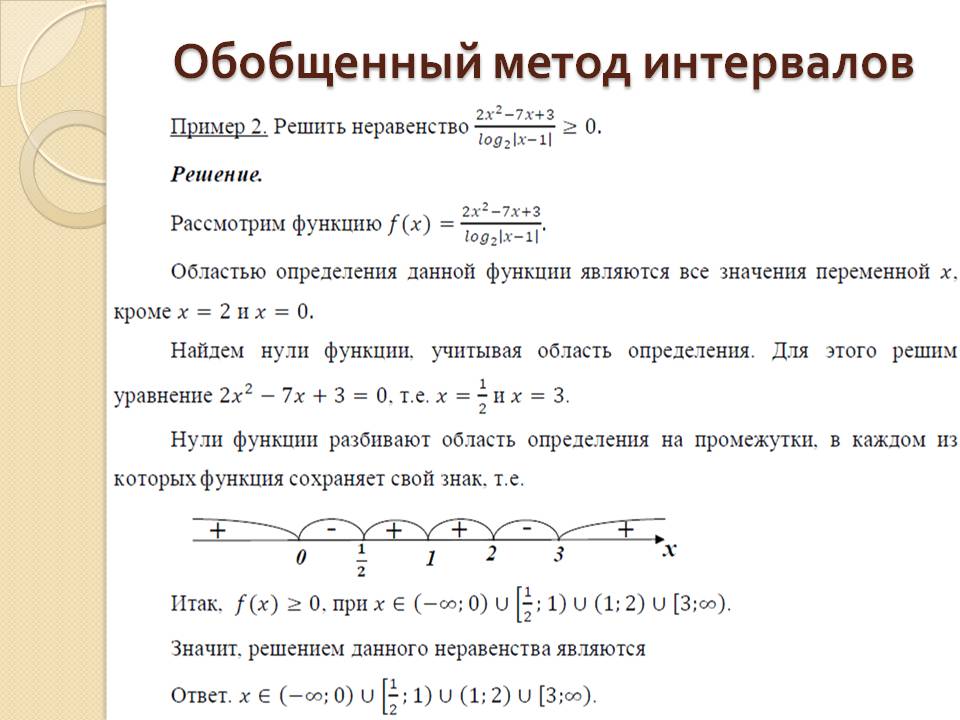
1. Найдите сумму всех целых решения неравенства:
2. Найдите количество целых решений неравенства:
3. Найдите сумму всех целых решения неравенства: )

**Метод интервалов для смешанных неравенств**

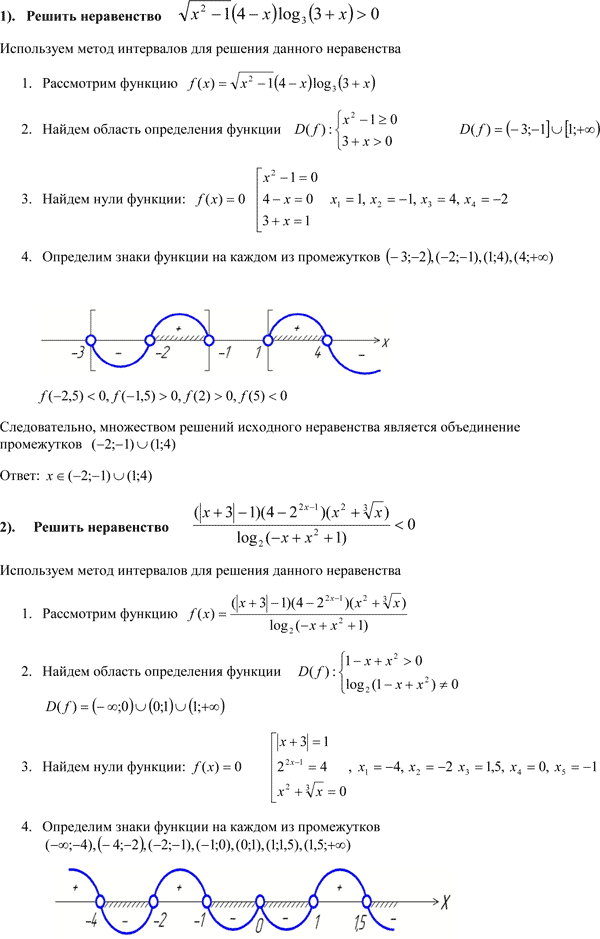
Наиболее полезен обобщённый метод интервалов при решении неравенств «смешанного»

типа, т.е. неравенств, содержащих части различного вида.

Задание 14

Найти наименьшее целое положительное решение неравенства 

Задания 15-16



**Если все множители неравенства записаны в виде(*x ± a*) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!**

**При решении сложных неравенств:**

1. Переносим все слагаемые из правой части неравенства в левую часть.

2. Приводим дроби к общему знаменателю. При этом перед приведением не забываем разложить на множители знаменатель каждой дроби (если это возможно)!!!

3. При решении неравенств старайтесь, чтобы все выражения в неравенстве были вида (*x ± a*), а не (*a ± x*) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками). Когда неравенство записано в таком виде **значение неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно и это облегчит решение!!!**

4. **НИКОГДА НЕ ДОМНОЖАЙТЕ (СОКРАЩАЙТЕ) НА ЗНАМЕНАТЕЛЬ, ЕСЛИ В НЕМ ЕСТЬ ПЕРЕМЕННАЯ!!!!! ЕГО НУЖНО СОХРАНИТЬ ДО КОНЦА РЕШЕНИЯ!!!**