**Применение метода интервалов к решению неравенств при подготовке к ЦТ**

При решении многих задач, в том числе и задач ЦТ часто возникает необходимость либо непосредственно решить неравенство, либо этот шаг – решение неравенства возникает как вспомогательный при решении других, более сложных и объёмных задач. Обобщённый метод интервалов наиболее универсален при решении неравенств практически любого типа. Подход, положенный в основу метода интервалов, основан на следующем свойстве непрерывной функции: функция сохраняет постоянный знак на интервале (a, b), на котором эта функция непрерывна и не обращается в нуль. Это же свойство характерно для числовых лучей (−∞, a) и (a, +∞).

**Схема решения выглядит следующим образом:**

**1. Привести неравенство к такому виду, где в левой части находится функция f (x), а в правой 0.**

**2. Найти область определения функции f(x).**

**3. Найти нули функции f(x), то есть – решить уравнение f(x) = 0 (а решать уравнение обычно проще, чем решать неравенство).**

**4. Изобразить на числовой прямой область определения и нули функции.**

**5. Определить знаки функции f(x) на полученных интервалах. Надо довольно чётко знать «правило чередования знаков», а именно: определить знак в крайнем справа интервале, а далее – при переходе через корень чётной кратности – знак сохраняется, при переходе через корень нечётной кратности – знак изменяется.**

**6. Выбрать интервалы, где функция принимает необходимые значения и записать ответ.**

 Многие учащиеся в современном мире не желают запоминать «лишнюю информацию». Поэтому я считаю, что метод интервалов является палочкой выручалочкой для «среднего» ученика, так как даже простейшие случаи неравенств – линейные и квадратные – можно безошибочно решать этим методом, причем для целых неравенств можно пропустить пункт 2: найти область определения функции f(x).

Задание 1 (РТ1, 2013/2014г., А–14)

Решением неравенства $1-\frac{х}{5}\leq \frac{1}{2}-х является промежуток:$

1. $\left(-\infty ;-\right.\left.\frac{5}{12}\right]$; 2) $\left(-\infty ;-\right.\left.\frac{5}{8}\right]$; 3) $\left[-\frac{5}{8};\right.\left.+\infty \right)$; 4)$ \left[-\frac{5}{12};\right.\left.+\infty \right)$; 5) $\left(-\infty ;\right.\left.\frac{5}{4}\right]$;

$-\frac{х}{5}+х\leq \frac{1}{2}-1;$

$$-2х+10х\leq 5-10;$$

$8х\leq -5;$

На этом этапе можем перейти к уравнению:

$$8х=-5;$$

$х=-\frac{5}{8}$.

 – +

 х

 $-\frac{5}{8}$

$хϵ\left(-\infty ;-\right.\left.\frac{5}{8}\right]$.

Ответ: 2)

Задание 2.

Решить неравенства методом интервалов:

$а) \left(2х-5\right)^{2}\geq 0;$

+

x

2,5

Ответ: ($-\infty $;$+\infty $);

$б) \left(2х-5\right)^{2}\leq 0;$

Ответ: $\left\{2,5\right\}$

$в) \left(2х-5\right)^{2}>0;$

Ответ: ($-\infty $; 2,5)$∪(2,5;+\infty )$

+

+

x

2,5

$г) \left(2х-5\right)^{2}<0;$

Ответ: нет решений

Задание 3.

Найдите количество целых решений неравенства $9х-2х^{2}-4>0.$

-

-

x

4

+

$$\frac{1}{2}$$

$9х-2х^{2}-4=0$,

$\left[\begin{array}{c}х=\frac{1}{2},\\х=4,\end{array}\right.$

Выбираем интервал, где функция принимает положительные значения: $\left[\frac{1}{2}\right.$;4), выписываем целые решения: 1,2,3, всего три целых решения неравенства

Ответ: 3

Задание 4.

Решите неравенство: $\left(1-x\right)^{2}\left(x-3\right)\left(x+1\right)x\left(5-x\right)\left(x+2\right)\geq 0$.

$\left(1-x\right)^{2}\left(x-3\right)\left(x+1\right)x\left(5-x\right)\left(x+2\right)=0$.

Найдём нули функции и определим их кратность: $x$ =1 (четная кратность), остальные корни 3, -1, 0, 5, -2 (нечетной кратности). Отмечаем корни на числовой оси с учетом области определения неравенства и определяем знаки на промежутках с учетом кратности корней.

Распространенной ошибкой является потеря изолированных точек, на что стоит обратить особое внимание. Многие рекомендуют в точках, изображающих корни четной кратности рисовать петлю и ставить в ней «улетающий знак».

 – – + – – +

 х

 –5 –2 0 1 3

Ответ:$(-\infty ;-\left.2\right]∪\left[-1;0\right]∪\left\{1\right\}∪\left[3;5\right]$

**Метод интервалов для рациональных неравенств**

При решении рациональных неравенств, по существу – единственное отличие от решения

целых неравенств – это необходимость учесть область определения неравенства. А именно – деление на ноль не определено, поэтому знаменатель дроби не может равняться нулю.Если неравенство строгое, то корни числителя обозначаем «выколотой» точкой, если нет - закрашенной. Корни знаменателя «выколоты» всегда, независимо от строгости знака сравнения.

Задание 5. РТ-1, 2015/2016г., В6**.**

Найдите количество всех целых решений неравенства $\frac{(х^{2}+8\sqrt{6})(х+18)^{2}}{227-х^{2}}\geq 0$

Решение.

1. Ведем функцию f$(х)=\frac{\left(х^{2}+8\sqrt{6}\right)\left(х+18\right)^{2}}{227-х^{2}}$
2. D(y) =$\left(-\infty ;-\sqrt{227}\right)∪\left(-\sqrt{227};\sqrt{227}\right)∪\left(\sqrt{227};+\infty \right)$
3. Найдем нули функции:$ \left(х^{2}+8\sqrt{6}\right)\left(х+18\right)^{2}=0$;

$\left[\begin{array}{c}х^{2}+8\sqrt{6}=0,\\\left(х+18\right)^{2}=0;\end{array}\right. $ $х=-18$ .

1. Отметим нули числителя и знаменателя на координатной прямой. Неравенство является нестрогим, значит, нули числителя изображаются закрашенными точками, а нули знаменателя $–$ выколотыми. Числа $-\sqrt{227}; -18; \sqrt{227}$ разбивают координатную прямую на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак.



1. Определим знаки функции f(x) в крайнем справа интервале: смотрим на старшие коэффициенты в каждом множителе: в знаменателе перед $х^{2}$ стоит знак «$-$», а в числителе везде «+», значит в крайнем справа интервале знак «$-$». Или можно определить знак функции при любом значении х$>16$. В любом случае $f \left(х\right)<0 в крайнем справа интервале. $Обращаем особое внимание на корень х = 18 $– $он четной кратности, значит, проходя через эту точку функция знак не изменит. Расставляем знаки.
2. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: ($-\sqrt{227}$;$ \sqrt{227}$)$∪\left\{-18\right\}$

Так как $15<\sqrt{227}<16$, то на промежутке (0;$ \sqrt{227}$) пятнадцать целых решений, на промежутке ($-\sqrt{227}$;$ 0$) $- $ ещё 15. Добавляем х = 0 и х = $-18.$ Всего 32 целых решения.

Ответ: 32 целых решения.

 При решении дробно-рациональных неравенств при подготовке к ЦТ учащимся показываю и другую форму оформления решения методом интервалов. Рассмотрим на следующем примере:

Задание 6. РТ-2, 2018/2019г., В6**.**

Найдите сумму всех целых решения неравенства: $\frac{56+6х-2х^{2}}{12-х-х^{2}}\leq 1$***.***

Данное неравенство удобно решать, используя метод интервалов. Для этого преобразуем исходное неравенство так, чтобы справа стоял 0.

$\frac{56+6х-2х^{2}}{12-х-х^{2}}-1\leq 0$ *;*

$$\frac{56+6х-2х^{2}-12+х+х^{2}}{12-х-х^{2}}\leq 0;$$

$\frac{-х^{2}+7х+44}{12-х-х^{2}}\leq 0$;

Следующий шаг: приравниваем выражение, стоящее слева к нулю и находим корни числителя и корни знаменателя.

$\frac{-х^{2}+7х+44}{12-х-х^{2}}=0$;

Корни числителя: $-4$; 11 $–$ точки закрашенные.

Корни знаменателя: $-4;$ 3 $-$точки выколотые.

Корень х = $-4$ встречается два раза, следовательно, корень четной кратности, значит, проходя через эту точку, функция знак не изменит. Помним, что выколотая точка «сильнее» закрашенной! Расставляем знаки.

 + $+$ $-$ +

 х

 $-$4 3 11

Выбираем интервал, где функция принимает отрицательные значения: х$ϵ$($3;\left.11\right]$

Находим сумму всех целых решения неравенства: 4+5+6+7+8+9+10+11=60.

Ответ: 60

Задание 7. ЦТ 2015 г., В6

 Найдите сумму целых решений неравенства .

**Решение.**

Данное неравенство удобно решать, используя метод интервалов. Для этого преобразуем исходное неравенство:



Заметьте, что, умножая на -1 левую и правую части неравенства, мы поменяли знак неравенства.

Далее разложим квадратный трехчлен в числителе на множители:

, а в знаменателе применим формулу разности квадратов: .

Тогда неравенство принимает вид 

Все это были обычные шаги, необходимые для преобразования неравенства к виду, пригодному для применения метода интервалов.

Теперь внимание! Не спешите сокращать  в числителе и знаменателе. Так вы упустите из виду, что x не может быть равен -2. Перед сокращением необходимо пометить, что .

Итак, рассматриваем неравенство



Расставляем нули числителя и знаменателя на числовой прямой, а также знаки неравенства, используя чередование знаков: начинаем со знака «+», а проходя через точку , знак не меняем.



Теперь наносим на полученную область решений выколотую точку  (на чередование знаков эта точка не влияет)



По полученной схеме записываем решение неравенства

.

Обратите внимание, что число 4 само по себе является решением неравенства, поэтому включается в множество решений.

Из записанного множества выписываем все целые решения: .

Их сумма равна -8.

**​Ответ:**-8.

**Метод интервалов для неравенств с модулями**

Аналогичным образом обобщённый метод интервалов может быть использован при решении неравенств с модулями (в «противовес» обычному способу решения подобных неравенств – рассмотрения случаев)

Задание 8.

Найти произведение наименьшего и наибольшего целых решений неравенства

$$\left|20-х-х^{2}\right|+2<2∙\left|4-х\right|+\left|х+5\right|$$



**Метод интервалов для иррациональных неравенств**

Обобщённый метод интервалов во многих случаях представляет собой хорошую альтернативу традиционным схемам решения иррациональных неравенств вида $\sqrt{f (x)}$< g(x) и $\sqrt{f (x)} $> g(x).

При решении иррациональных неравенств область определения функции естественным образом находится из условия неотрицательности подкоренного выражения.

Задание 9.

Решите неравенство $\sqrt{х+61}<х+5$

1. Ведем функцию $f \left(х\right)=\sqrt{х+61}-х-5$
2. D(y) = $\left[-61;\right.\left.+\infty \right)$;
3. Найдем нули функции:$ \sqrt{х+61}=х+5$;

$\left\{\begin{array}{c}х+61=(х+5),^{2}\\х+5\geq 0;\end{array}\right.$ $ \left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}х=-12,\\х=3,\end{array}\right.\\х\geq -5;\end{array}\right.$ $х=3.$

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

 + $-$ х

 $-$61 3

1. Определить знак функции f (x) в крайнем справа интервале:

$f \left(20\right)=\sqrt{20+61}-20-5=9-25=-14$, значит в крайнем справа интервале знак «$-$». Так как область определения на промежутке $\left[-61;\right.\left.+\infty \right)$ непрерывна, то дальше идет чередование знаков.

1. Выбираем интервал, где функция принимает отрицательные значения: (3;+$\infty $)

Ответ: (3;+$\infty $)

Найдите количество целых решений неравенства: $\sqrt{х+6}>х$

1. Ведем функцию $f \left(х\right)=\sqrt{х+6}-х$
2. D(y) = $\left[-6;\right.\left.+\infty \right)$;
3. Найдем нули функции:$ \sqrt{х+6}=х$;

$\left\{\begin{array}{c}х+6=х^{2}\\х\geq 0;\end{array}\right.$ $ \left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}х=-2,\\х=3,\end{array}\right.\\х\geq 0;\end{array}\right.$ $х=3.$

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

 + $-$ х

 $-$6 3

1. Определить знак функции f (x) в крайнем справа интервале:

$f \left(10\right)=\sqrt{10+6}-10=4-10=-6$, значит в крайнем справа интервале знак «$-$». Так как область определения на промежутке $\left[-6;\right.\left.+\infty \right)$ непрерывна, то дальше идет чередование знаков.

1. Выбираем интервал, где функция принимает положительные значения: $\left[-6\right.$;3)
2. Ответ: $\left[-6\right.$;3)

Задание 10. Решите неравенство: $\sqrt{6-х}+\sqrt{х-1}\geq \sqrt{2х-1}$

1. Ведем функцию $f \left(х\right)=\sqrt{6-х}+\sqrt{х-1}-\sqrt{2х-1}$
2. D(y) = $\left[1;\left.6\right]\right.$
3. Найдем нули функции:$ \sqrt{6-х}+\sqrt{х-1}=\sqrt{2х-1}$;

$\sqrt{-х^{2}+7х-6}=х-3$;

$\left\{\begin{array}{c}-х^{2}+7х-6=(х-3)^{2},\\х-3\geq 0;\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}х=1,5,\\х=5,\end{array}\right.\\х\geq 3;\end{array}\right. $ $х=5.$

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

 + $-$

 х

 1 5 6

1. Определить знак функции f (x) в крайнем справа интервале трудно, поэтому определим:

$f \left(2\right)=\sqrt{6-2}+\sqrt{2-1}-\sqrt{4-1}=2+1-\sqrt{5} >0$, значит на интервале$\left[1;\left.5\right]\right.$ знак «+». Так как область определения на промежутке $\left[1;\left.6\right]\right.$ непрерывна, то дальше идет чередование знаков.

1. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: $\left[1;\left.5\right]\right.$.

Ответ: $\left[1;\left.5\right]\right.$

Задание 11.

Решите неравенство:$ \left(х-3\right)\sqrt{х^{2}-х-2}\geq 0 $;

1. Ведем функцию $f \left(х\right)=(х-3)\sqrt{х^{2}-х-2}$.
2. D(y) = $\left(-1;\right.1)∪\left[2;\right.\left.+\infty \right)$;
3. Найдем нули функции:$ \left(х-3\right)\sqrt{х^{2}-х-2}=0$;

$ \left[\begin{array}{c}х=3,\\х=-1,\\х=2.\end{array}\right.$

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

 $-$ $ -$ +

 х

$ -$1 2 3

1. Определяем знаки функции f (x) на промежутках:

$f \left(4\right) >0$, f (2,5)$<0$, f ($-$2)$<0$

1. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: $\left[3;\left.+\infty \right) \right.$и равна нулю на области определения: х = $-$1; и х = 2.

Ответ: $\left\{-1;2\right\}∪\left[3;\left.+\infty \right) \right.$

Из недостатков метода – может быть затруднено определение знаков на полученных интервалах, особенно, если точки расположены довольно близко друг к другу и/или когда значения нулей или границ области определения – «плохие».

Решите самостоятельно:

1. Найдите количество целых решений неравенства: $\sqrt{8+2х-х^{2}}>6-2х$

Ответ: ($-\frac{13-\sqrt{29}}{5}$;$\left. 4\right]$; 3 целых решения

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства: $\sqrt{2-х}+\sqrt{-3-2х}>\sqrt{7-х}$

Ответ: ($-\infty $;$-2$); $-$3

1. Найдите количество целых решений неравенства: $\sqrt[5]{2-х}∙\sqrt{-2х^{2}+9х+5}\geq 0 $

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}\right.$;$\left.2\right]∪\left\{5\right\}$; 4 целых решения.

**Метод интервалов для логарифмических неравенств**

Обобщённый метод интервалов может быть использован и вместо традиционного способа решения логарифмических и показательных неравенств.

Задание 12.

Решите неравенство и найдите количество целых решений: $log\_{\frac{3-х}{2}}\left(\frac{6}{х+1}\right)\geq -1$

1. Ведем функцию $f \left(х\right)=log\_{\frac{3-х}{2}}\left(\frac{6}{х+1}\right)+1$.
2. Найдём область определения функции:

$\left\{\begin{array}{c}\frac{3-х}{2}>0,\\\frac{3-х}{2}\ne 1,\\\frac{6}{х+1}>0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}х<3,\\х\ne 1,\\х>-1.\end{array}\right.$ D(y) = $\left(-1;\right.1)∪(1;3)$;

1. Найдем нули функции:$ log\_{\frac{3-х}{2}}\left(\frac{6}{х+1}\right)=-1$,

$\frac{6}{х+1}=(\frac{3-х}{2})^{-1}$,

$\frac{6}{х+1}= \frac{2}{3-х}$,

$18-6х=2х+2$,

$$х=2$$

1. Изобразим на числовой прямой область определения и нули функции:

x+

-1

+

1

2

3

-

+

1. Определяем знаки функции f (x) на промежутках:

 $f \left(0\right)=log\_{1,5}6+1 >0$, а дальше чередование знаков.

1. Выбираем интервалы, где функция принимает неотрицательные значения: $(-1;1)∪\left[2;3 \right.)$.

Целые решения неравенства: 0 и 2

 Количество целых решений: 2

Ответ: 2

Для сравнения: это же неравенство, решенное другим способом

Решите самостоятельно:

1. Найдите сумму всех целых решения неравенства: $log\_{2х+3}х^{2}<1$
2. Найдите количество целых решений неравенства:$ log\_{2-х}\left(х+2\right)∙log\_{х+3}\left(3-х\right)\leq 0$
3. Найдите сумму всех целых решения неравенства: $ log\_{\frac{1}{4}}(3х-18)^{2}\geq log\_{\frac{1}{2}}(2х-10$)

**Метод интервалов для смешанных неравенств**

Наиболее полезен обобщённый метод интервалов при решении неравенств «смешанного»

типа, т.е. неравенств, содержащих части различного вида.

Задание 14

Найти наименьшее целое положительное решение неравенства 

Задания 15-16



**Если все множители неравенства записаны в виде(*x ± a*) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!**

**При решении сложных неравенств:**

1. Переносим все слагаемые из правой части неравенства в левую часть.

2. Приводим дроби к общему знаменателю. При этом перед приведением не забываем разложить на множители знаменатель каждой дроби (если это возможно)!!!

3. При решении неравенств старайтесь, чтобы все выражения в неравенстве были вида (*x ± a*), а не (*a ± x*) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками). Когда неравенство записано в таком виде **значение неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно и это облегчит решение!!!**

4. **НИКОГДА НЕ ДОМНОЖАЙТЕ (СОКРАЩАЙТЕ) НА ЗНАМЕНАТЕЛЬ, ЕСЛИ В НЕМ ЕСТЬ ПЕРЕМЕННАЯ!!!!! ЕГО НУЖНО СОХРАНИТЬ ДО КОНЦА РЕШЕНИЯ!!!**