**Подготовка учащихся к ЦТ**

**по теме «Решение задач на проценты»**

Современная жизнь делает задачи на проценты актуальными, так как сфера практического приложения процентных расчетов расширяется. Вопросы инфляции, повышение цен, рост стоимости акций, снижение покупательской способности касаются каждого человека в нашем обществе. Планирование семейного бюджета, выгодного вложения денег в банки, невозможны без умения производить несложные процентные вычисления.

Сами проценты не дают экономического развития, но их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. Обдуманное изучение процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

В вариантах выпускных экзаменов и ЦТ встречаются задачи на проценты, и эти задачи часто вызывают затруднения у школьников. Причина в том, что тема «Проценты» изучается в 6 классе. Далее, задачи на проценты включаются в систему задач по мере приобретения учащимися новых знаний об уравнениях, системах уравнений в следующих классах.

В чем причина путаницы с процентами, как преодолеть трудности?

Прежде всего, обратимся к определению понятия процента: 1 % - это сотая часть числа, а несколько процентов - соответственно - несколько сотых частей числа, т.е. проценты - это дроби. Значит, чтобы решать задачи на проценты, нужно уметь решать задачи на дроби. Достаточно ли этих умений?

Традиционно в школьном курсе математики рассматриваются три основные задачи на дроби и соответствующие им три основные задачи на проценты.

Задачи на проценты учат решать с 6 класса.

Решение задач этого типа тесно связано с тремя алгоритмами:

1. нахождение процента от числа,
2. нахождение числа по его проценту,
3. нахождение процентного отношения.

**Три основные задачи на проценты:**

|  |  |
| --- | --- |
| **1)** нахождение процента ***m*** от заданного числа ***a***: | а  \_m  ?  а  \_m  ? |
| **2)** нахождение числа ***a*** по его проценту ***m***, равному заданному числу ***b***: |  |
| **3)** нахождение процентного отношения чисел (какой процент одно число ***b*** составляет от другого числа ***a***): |  |

Однако, мир задач на проценты бесконечен, эти задачи интересны, увлекательны, развивают логику, сообразительность, побуждают учащихся мыслить.

мы можем разбить задачи на проценты:

* на знакомые (три основных вида),
* модифицированные (на «потерю массы»; на смеси, сплавы и растворы; вклады под проценты);
* незнакомые (сложные проценты).

Ученик овладевает разнообразными способами рассуждения, обогащая свой арсенал приемов и методов. Но при этом также важно, что он имеет возможность выбора и может пользоваться тем приемом, который ему кажется более удобным.

Итак, рассмотрим, сначала три основных вида задач на проценты.

1. Нахождение процента от числа можно выполнять тремя способами:

* найти величину одного процента, для чего разделить число на 100, а затем умножить полученный результат на искомое количество процентов;
* представить процент в виде обыкновенной или десятичной дроби и умножить число на эту дробь.
* с помощью пропорции.

В любом случае особое внимание уделяю оформлению краткого условия.

Это может быть таблица, но для экономии времени - это чаще всего схема, где однозначно должно выполняться требование:

**Величины должны быть записаны под величинами, проценты под процентами!**

**Пример.**

***Джинсы стоили 60 рублей. Сколько они стали стоить, когда цена увеличилась на 15%?***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Стоили | 60 руб. | 100% |
| Добавили | ? руб. | 15% |
| Новая цена | ? руб. | ?% |

1 способ:

1. 60:100 = 0,6 (руб.) – составляет 1%
2. 0,615 = 9 (руб.) – добавили (на столько повысилась цена)
3. 60 + 9 = 69 (руб.) – новая цена

2 способ:

15% = 0,15,

1) 0,1560 = 9 (руб.) – добавили (на столько повысилась цена).

2) 60 + 9 = 69 (руб.) – новая цена

3 способ:

1. 100% + 15% = 115% – новая цена

115% = 1,15

1. 1,1560 = 69 (руб.) – новая цена

4 способ:

;

;

х = 69.

Ответ 69 рублей.

1. нахождение числа по его проценту можно находить аналогичными способами:

* найти величину одного процента, для чего разделить число на 100, а затем умножить полученный результат на 100 процентов;
* представить процент в виде обыкновенной или десятичной дроби и разделить значение процентов на эту дробь.
* с помощью пропорции.

***Пример.***

***Товар на распродаже уценили на 15%, при этом он стал стоить 68 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?***

Решение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Стоил | ? руб. | 100% |
| Уценка | ? руб. | 15% |
| Новая цена | 68 руб. | ?% |

До понижения цены товар стоил 100%. Цена на товар после распродажи уменьшилась на 15%, т.е. стала 100% – 15% = 85%, в рублях эта величина равна 68 рублей.

1 способ.

68 : 85 = 0,8 (руб.) – 1%  
0,8 100 = 80 (руб.) – стоил товар до распродажи.

2 способ.

Это задача на нахождение числа по его проценту, решается делением числа на соответствующий ему процент и путем обращения полученной дроби в проценты, умножением на 100, или действием деления на дробь, полученную при переводе из процентов.  
68 : 85 100 = 80 (руб.) или 68 : 0,85 = 80 (руб.)

3 способ.

С помощью пропорции:  
68 руб. – 85 %  
 х руб. – 100 %,

получим х = = 80 (руб.)

Ответ: 80 рублей стоил товар до распродажи.

1. Для нахождения процентного отношения двух величин используют следующие правила:

* можно разделить первую величину на вторую и полученную дробь записать в виде процентов;
* с помощью пропорции.

Чтобы узнать, на сколько процентов увеличилась или уменьшилась данная величина, необходимо найти:

1. на сколько единиц увеличилась или уменьшилась эта величина;
2. сколько процентов составляет полученная разность от первоначального значения величины.

Примеры.

*а) На сколько процентов 10 больше 6?   б) На сколько процентов 6 меньше 10?*  
             Решение:

Ответ: %,  40 %.

в) До снижения цен холодильник стоил 250р., после снижения – 230 р. На сколько процентов снизилась стоимость холодильника?

Решение:

Узнаем, на сколько рублей изменилась цена холодильника: 250 – 230=20 р.

Найдем, сколько процентов составляет полученная разность от первоначальной стоимости холодильника:

Ответ: стоимость холодильника понизилась на 8%.

На эту базу знаний и опираются, готовя учеников к итоговым экзаменам в 9 и 11 классах. А теперь рассмотрим задачи, предлагаемые на выпускных экзаменах по математике на второй и третьей ступени обучения и при сдаче ЦТ.

**Задачи на концентрацию, сплавы и смеси**

Отношения объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле:   **К = %**

(к - концентрация вещества;   р - процентное содержание вещества (в процентах)).

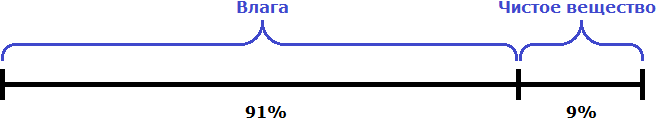
**Примеры.**

***1. Виноград содержит 91% влаги, а изюм – 7%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 21 килограмма изюма?***

Действия ученика: это незнакомая задача на %. Учащиеся обязательно должны знать, что количество сухого вещества не изменяется.

Решение:

Виноград состоит из влаги и чистого вещества. Если в свежем винограде содержится 91% влаги, то на остальные 9% будет приходиться чистое вещество этого винограда:



Изюм же содержит 93% чистого вещества и 7% влаги:

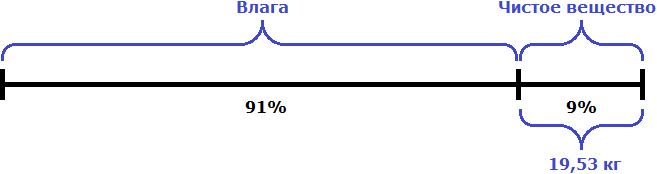


Заметим, что в процессе превращения винограда в изюм, исчезает только влага этого винограда. Чистое вещество остаётся без изменения. После того, как виноград превратится в изюм, в получившемся изюме будет 7% влаги и 93% чистого вещества.

Определим, сколько чистого вещества содержится в 21 кг изюма. Для этого найдем 93% от 21 кг:

21 0,93 = 19,53 (кг)

Теперь вернемся к первому рисунку. Наша задача состояла в том, чтобы определить сколько винограда нужно взять для получения 21 кг изюма. Чистое вещество массой 19,53 кг будет приходиться на 9% винограда:



Теперь зная, что 9% чистого вещества составляют 19,53 кг, мы можем определить сколько винограда требуется для получения 21 кг изюма. Для этого нужно найти число по его проценту:

19,53 : 9 = 2,17 (кг)  
2,17  100 = 217 (кг)

Значит, для получения 21 кг изюма нужно взять 217 кг винограда.

2 способ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, кг | Вода, % | Концентрация сухого вещества, % | Масса сухого вещества, кг |
| изюм | 21 | 7 | 100 – 7 = 93 | 0,93 . 21 |
| виноград | ? | 91 | 100 – 91 = 9 | 0,09 . х |

0,09 . х = 0,93 . 21

х = = нужно взять винограда.

Ответ: 217 кг.

***2.*** ***Свежие грибы содержали по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?***

Решение:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, кг | Вода, % | Концентрация сухого вещества, % | Масса сухого вещества |
| Свежие грибы | 22 | 90 | 100–90=10 | 22 . 0,1 |
| сухих грибы | ? | 12 | 100–12=88 | 22 . 0,1 |

1) 22 . 0,1 = 2,2 (кг) - грибов по массе в свежих грибах; (0,1 это 10% сухого вещества)  
2) 2,2 : 0,88 = 2,5 (кг) - сухих грибов, получаемых из свежих (количество сухого вещества не изменилось, но изменилось его процентное содержание в грибах и теперь 2,2 кг это 88% или 0,88 сухих грибов).  
Можно решить и с помощью уравнения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, кг | Вода, % | Концентрация сухого вещества, % | Масса сухого вещества, кг |
| Свежие грибы | 22 | 90 | 100–90=10 | 22 . 0,1 |
| сухих грибы | х | 12 | 100–12=88 | 0,88 |

0,88х = 22 . 0,1

х = 2,5

**Ответ:** 2,5 кг.

1. ***Оставили на хранение 20 кг крыжовника, ягоды которого содержат 99% воды. Содержание воды в ягодах уменьшилось до 98%. Сколько крыжовника получится в результате?***

Решение:

1. 100 – 99 = 1 (%) = 0,01 – доля сухого вещества в крыжовнике сначала.
2. 20 . 0,01 = 0,2 (кг) – сухого вещества.
3. 100 – 98 = 2 (%) = 0,02 – доля сухого вещества в крыжовнике после хранения.
4. 0,2 : 0,02 = 10 (кг) – стало крыжовника.

Ответ: 10 кг.

***4. Влажность купленного арбуза составила 99%. В результате длительного хранения влажность снизилась до 98%. Как изменилась масса арбуза?***

Решение:

Свежий арбуз на 99% процентов состоит из жидкости и на 1% - из сухой массы. В результате усушки количество жидкости уменьшилось и составило 98% от новой, также уменьшившейся массы арбуза.

Количество же сухого вещества, оставаясь неизменным, составило 2% от новой массы арбуза. Процентное содержание в арбузе сухого вещества (при неизменной его массе) увеличилось вдвое.

Следовательно, масса арбуза в результате усушки уменьшилась вдвое.

1. ***К 100г 10-процентного раствора соляной кислоты добавили 60г воды. Какова концентрация нового раствора?***

Решение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, г | Концентрация  сухого вещества, % | Масса сухого вещества, г |
| 1 раствор | 100 | 10 | 100.0,1 |
| добавили | 60 | - |  |
| 2раствор | 100+60 | х | 0,01х.160 |

Количество кислоты не изменяется!

0,01х160 = 100

1,6х = 10

х = 10:1,6

х = 6,25%

Ответ: 6,25%

1. ***Сколько граммов воды надо добавить к 50г 20-процентного раствора соли, чтобы получить 5-процентный раствор соли?***

Решение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, г | Концентрация сухого вещества, % | Масса сухого вещества, г |
| 1 раствор | 50 | 20 | 50.0,2 |
| добавили | х | - | - |
| 2раствор | 50+х | 5 | 0,05.(50+х) |

Количество соли не изменяется!

0,05.(50+х) = 50.0,2

0,05.(50+х) = 10

50+х = 10:0,05

50+ х = 200

х = 150 (г)

Ответ: 150 грамм.

***7. Смешав 70 % -й и 60 % -й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50 % -й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90 % -го раствора той же кислоты, то получили бы 70 % -й раствор кислоты. Сколько килограммов 70 % -го раствора использовали для получения смеси?***

Решение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, кг | Концентрация сухого вещества, % | Масса сухого вещества, г |
| 1 раствор | х | 70 | 0,7.х |
| 2 раствор | у | 60 | 0,6.у |
| 3 раствор | 2 | 90 | 0,9.2 |
| смесь | х+у+2 | 70 | 0,7 (х +у+2) |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса, кг | Концентрация сухого вещества, % | Масса сухого вещества, г |
| 1 раствор | х | 70 | 0,7.х |
| 2 раствор | у | 60 | 0,6.у |
| добавили | 2 | - | - |
| смесь | х+у+2 | 70 | 0,7(х +у+2) |

Используя последний столбик из таблицы составим 2 уравнения:

0,7 . х + 0,6 . у = 0,5 . ( х + у + 2 ) и 0,7 . х + 0,6 . у + 1,8 = 0,7 . ( х + у + 2).

Объединив их в систему, и решив ее, получим, что х = 3 кг.

Ответ: 3 килограмма 70 % -го раствора использовали для получения смеси.

***8.*** ***Из двух растворов с различным процентным содержанием спирта массой 100 г и 900 г отлили по одинаковому количеству раствора. Каждый из отлитых растворов долили в остаток другого раствора, после чего процентное содержание спирта в обоих растворах стало одинаковым. Найдите, сколько раствора (в граммах) было отлито из каждого раствора.***

Решение.

Пусть х – процентное содержание спирта в первом растворе, у – процентное содержание спирта во втором растворе, ху.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Общее количество, г** | **Спирт, г** | **Концентрация**  **(процентное содержание)** |
| **1раствор** | 100 | 0,01х | 0,01х |
| **2раствор** | 900 | 0,01у | 0,01у |
| **Отлили, 11** | а | 0,01х а |  |
| **Отлили, 21** | а | 0,01у а |  |
| **Осталось, 12** | 100 – а | 0,01х |  |
| **Осталось, 22** | 900 –а | 0,01у |  |
| **11+22** | а + (900 –а) = 900 | 0,01х а+ 0,01у |  |
| **21+12** | а + (100 –а) = 100 | 0,01у а+0,01х |  |

Т.к.процентное содержание спирта в обоих растворах стало одинаковым, то ;

ах 9ау + 9ах = 900х900у;

а(х)+9а (ху) =900 (ху);

10а (ху)= 900 (ху); т.к. ху, то можно разделить обе части уравнения на (ху),

10а=900;

а =90

Ответ: 90 грамм.

***9. Товар стоил тысячу рублей. Продавец поднял цену на 10%, а через месяц снизил её на 10%.Сколько стал стоить товар?***

Решение:

Пусть товар стоил 1000руб., после повышения цены на 10% он стал стоить 1,1 .1000 руб. После понижения этой цены на 10%, он стал стоить 0,9 .1,1 .1000=990 руб.

**Ответ**. 990 руб.

**10. *Что произойдет с ценой товара, если сначала ее повысить на 25%, а потом понизить на 25%?***

Решение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Цена, % | Цена, рублей |
| Первоначальная цена | 100% | х |
| Повысили | 25% | 0,25 .х |
| Новая цена | 125% 100 % | 1,25 .х |
| Понизили | 25% | 0,25 . 1,25 .х |
| Окончательная цена | 75% от новой цены | 0,75 1,25х= 0,9375х |
| Разница | 100% – 93,75% = 6,25% | х – 0,9375х = 0,0625х |

Пусть цена товара х рублей, тогда после повышения товар стоит 125% прежней цены, т.е.   1,25х;, а после понижения на 25% , его стоимость составляет 75% или 0, 75 от повышенной цены, т.е. 0,75 1,25х= 0,9375х,

т.к. х – 0,9375х = 0,0625х;

  100% = 6,25% , значит, цена товара понизилась на 6, 25 %.  
Ответ**:** первоначальная цена товара снизилась на 6,25%.

**11. Цена на бензин в первом квартале увеличилась на 20% , а во втором на 30%. На сколько процентов увеличилась цена за два квартала?**

1) 100% + 20% = 120% –стала цена после первого квартала.

2) 0,3 120 = 36% – увеличилась цена за второй квартал по отношению к первоначальной цене.

3) 120% + 36% = 156% –стала цена после второго квартала

4) 156% – 100% = 56% – на столько увеличилась цена.

Ответ: на 56%

**Решение задач на «сложные» проценты,**

**с использованием понятия коэффициента**

**увеличения (уменьшения).**

В задачах на банковские расчёты обычно встречаются простые и сложные проценты. В чём же состоит разница простого и сложного процентного роста? При простом росте процент каждый раз исчисляется, исходя из начального значения, а при сложном росте он исчисляется из предыдущего значения. При простом росте 100% – начальная сумма, а при сложном 100% каждый раз новые и равны предыдущему значению.

1. Чтобы увеличить положительное число **А** на **р %**, надо умножить число **А** на коэффициент увеличения К = (1+ 0,01Р).

2. Чтобы уменьшить положительное число **А** на **р %**, надо умножить число **А** на коэффициент уменьшения К = (1 – 0,01Р).

3. Если величина **А увеличивается в конце каждого этапа** на **р %**, то значение величины А в конце *п*-го этапа определяется по формуле: умножить число **А** на коэффициент увеличения К = (1+ 0,01Р)*п*

***Ап = А . (1+ 0,01Р)п***

***Примеры. 1. Банк платит доход в размере 4% в месяц от величины вклада. На счет положили 300 тысяч рублей, доход начисляют каждый месяц. Вычислите величину вклада через 3 месяца.***

Решение:

1. 100 + 4 = 104 (%) = 1,04 – доля увеличения вклада по сравнению с предыдущим месяцем.
2. 300 . 1,04 = 312 (тыс. руб.) – величина вклада через 1 месяц.
3. 312 . 1,04 = 324,48 (тыс. руб.) – величина вклада через 2 месяца.
4. 324,48 . 1,04 = 337,4592 (тыс. руб.) = 337 459,2 (руб.)-величина вклада через 3 месяца.

Или можно пункты 2 – 4 заменить одним, повторив с детьми понятие степени:

 300 .1,043 =337,4592(тыс. руб.) = 337 459,2 (руб.) – величина вклада через 3 месяца.

Ответ: 337 459,2 рубля

***2. Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 3000 рублей, а окончательная 3630 рублей?***

Решение:

Т.к. цена товара повышалась на одно и то же число %, обозначим число % за х,

х % = 0,01 х.

Используя понятие коэффициента увеличения, сразу получаем уравнение:  
3000 . (1 + 0,01х)2 = 3630.

Решив его, получим, что х = 10 %.

Ответ: на 10 % повышалась цена товара каждый раз.

***3. Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 5000 рублей, а окончательная 4050 рублей?***

Решение:

1 способ.

Т.к. цена товара снижалась на одно и то же число %, обозначим число % за х. Пусть в первый и второй раз цена товара была понижена на х %, тогда после первого понижения цена товара стала (100 – х) %.

Составим пропорцию:  
5000 руб. – 100%  
у руб. – (100 – х)%,

получим у = = 50 . (100 – х) рублей – стоимость товара после первого понижения.

Составим новую пропорцию уже по новой цене:  
50 (100 – х) руб. – 100%  
z руб. – (100 – х)%,

получим z = 0,5 . (100 – х)2 рублей – стоимость товара после второго понижения.

Получим уравнение 0,5 . (100 – х)2 = 4050. Решив его, получим, что х = 10 % .

2 способ.

Т.к. цена товара снижалась на одно и то же число %, обозначим число % за х,

х % = 0,01 х.

Используя понятие коэффициента уменьшения, сразу получаем уравнение:  
5000 . (1 – 0,01х)2 = 4050.

Решив его, получим, что х = 10 %.

Ответ: на 10 % снижалась цена товара каждый раз.

***4.***  ***Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 3000 рублей, а окончательная 3630 рублей?***

Решение:

Т.к. цена товара повышалась на одно и то же число %, обозначим число % за х,

х % = 0,01 х.

Используя понятие коэффициента увеличения, сразу получаем уравнение:  
3000 . (1 + 0,01х)2 = 3630.

Решив его, получим, что х = 10 %.

Ответ: на 10 % повышалась цена товара каждый раз.

***5. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?***

Решение:

Пусть акции компании дорожали и дешевели на х %, х % = 0,01 х, а исходная стоимость акций была А. Используя, все условия задачи, получаем уравнение:

(1 + 0,01 х)(1 – 0,01 х)А = (1 – 0,09)А,  
1 – (0,01 х)2 = 0,91,  
(0,01 х)2 = (0,3)2,  
0,01 х = 0,3,  
х = 30 %.

Ответ: на 30 процентов подорожали акции компании в четверг.

Проценты – это одна из сложнейших тем математики, и очень многие учащиеся затрудняются или вообще не умеют решать задачи на проценты. А понимание процентов и умение производить процентные расчёты необходимы для каждого человека. Таким образом, для преодоления трудностей при решении задач на проценты на начальном этапе (в 6-ом классе), кроме ключевых задач, необходима система задач на развитие понимания понятия процента и применения его в различных измененных задачных условиях, по сравнению с теми, в которых первоначальные знания формировались. Также важно, что учащийся имеет возможность выбора и может пользоваться тем приемом, который ему кажется более удобным. Мир задач на проценты бесконечен, эти задачи интересны, увлекательны, развивают логику, сообразительность, побуждают учащихся мыслить.